PART3　三角形の面積

3　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ。

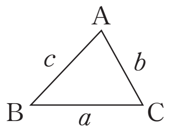
(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3)　△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

Point Pickup

△ABC の面積を S，内接円の半径を r，外接円の半径を R とすると



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし，$2s=a+b+c$　（ヘロンの公式）

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

第 9 講　PART3 確認問題

1　△ABC において, AB = 10, BC = $3\sqrt{5}$, CA = 5 のとき, △ABC の面積 S, 内接円の半径 r, 外接円の半径 R を求めよ。

$$S = \boxed{\text{アイ}},\quad r = \frac{\boxed{\text{ウ}} - \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}},$$

$$R = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

PART3　三角形の面積

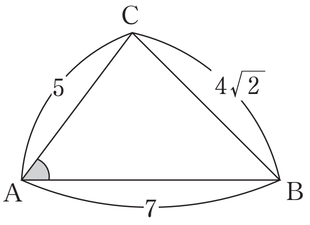
3　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3)　△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(1)　余弦定理より，$\cos A=\dfrac{7^2+5^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{42}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{3}{5}$



$\sin A>0$ より　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\dfrac{4}{5}=14$

（別解）　$s=\dfrac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)=6+2\sqrt{2}$ とおくと，ヘロンの公式より

$$S=\sqrt{s(s-7)(s-4\sqrt{2})(s-5)}$$
$$=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{\{6^2-(2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2-1^2\}}=\sqrt{28\cdot7}=14$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より

$$14=\frac{1}{2}r(7+4\sqrt{2}+5)\qquad(6+2\sqrt{2})r=14$$

$$r=\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}=3-\sqrt{2}$$

(3)　正弦定理より

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=4\sqrt{2}\div\left(2\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

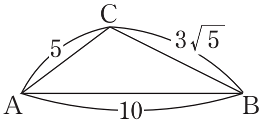
（別解）　$S=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4R}$　　より　$R=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4S}=\dfrac{7\cdot4\sqrt{2}\cdot5}{4\cdot14}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

第9講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア イ：15，ウ：5，エ：5，オ：2，カ：5，
キ：5，ク：2

[解説]

余弦定理より



$$\cos A$$

$$=\frac{5^2+10^2-(3\sqrt{5})^2}{2\cdot5\cdot10}$$

$$=\frac{25+100-45}{2\cdot5\cdot10}=\frac{80}{2\cdot5\cdot10}=\frac{4}{5}$$

$0^\circ<A<180^\circ$ より，$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot10\cdot5\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{15}$$

[A]

また，$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より [B]

$$15=\frac{1}{2}r(10+3\sqrt{5}+5)$$

よって

$$r=\frac{15\cdot2}{3\sqrt{5}+15}=\frac{15\cdot2}{3\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{10-2\sqrt{5}}{5-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

さらに，正弦定理より

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=3\sqrt{5}\div\left(2\cdot\frac{3}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

［A］　△ABCの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

［B］　△ABCの面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

（面積 S の別解）

$a=3\sqrt{5}$，$b=5$，$c=10$ より，

$s=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{5}+5+10)=\dfrac{3\sqrt{5}+15}{2}$ とおくと，ヘロンの公式から [C]

$$S=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+15}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{5}+15}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}+5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{15^2-(3\sqrt{5})^2\}\{(3\sqrt{5})^2-5^2\}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{180\cdot20}=\frac{60}{4}=\mathbf{15}$$

[C]　ヘロンの公式
△ABC の面積を S，$2s=a+b+c$ とすると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（外接円の半径 R の別解）

$S=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4R}$ より [D]

$$R=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4S}=\frac{10\cdot3\sqrt{5}\cdot5}{4\cdot15}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

[D]　△ABC の面積を S，外接円の半径を R とすると

$$S=\frac{abc}{4R}$$